

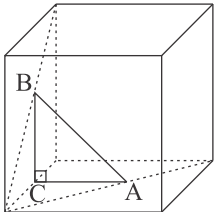


منبع: کنکور سراسری

گزینه ۳

۱

مکعبی به طول یال $4\sqrt{2}$ به صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبه اندازه AB است.



اندازه AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس، اندازه AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 2(2\sqrt{2})^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گزینه ۲

۲

شعاع و مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ عبارت‌اند از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

مرکز : $O'(2, -1)$ ، شعاع : $R' = 3$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(8, 7)$ مرکز دایره C است.

$$d = OO' = \sqrt{(2 - 8)^2 + (-1 - 7)^2} = 10$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

فاصله کانون‌های $F(2, 7)$ و $F'(2, -1)$ برابر $2c$ است.

$$2c = |FF'| = |7 - (-1)| = 8 \Rightarrow c = 4$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

$$a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

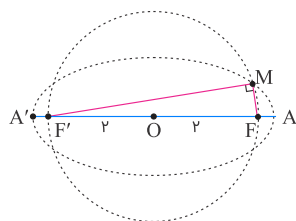
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به معلومات سؤال، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} c = 2$$

پس $OF = OF' = 2$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویه FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\triangle MF'F : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$

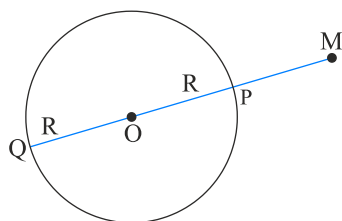


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

نکته: نقطه M و دایره $C(O, R)$ مفروض‌اند. در این صورت:

$$MP = |OM - R| = \text{کمترین فاصله } M \text{ از دایره}$$

$$MQ = OM + R = \text{بیشترین فاصله } M \text{ از دایره}$$



ابتدا محل برخورد قطرهای را می‌یابیم تا مرکز دایره و فاصله M از مرکز، مشخص شود:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow O = (2, -1) \xrightarrow{M=(4, -2)} |OM| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

حال فاصله مرکز دایره از خط $4x + 3y + 5 = 0$ را می‌یابیم تا شعاع دایره، مشخص شود:

$$R = |OH| = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

درنهایت طبق نکته فوق داریم:

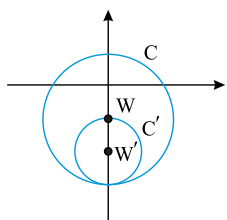
$$MP = |OM - R| = \sqrt{5} - 2 = \text{کمترین فاصله } M \text{ از دایره}$$

معادله گسترده دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادله وتر مشترک به دست آید:

$$(x^2 + y^2 + 2x - 3) - (x^2 + y^2 + 2y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \text{ : وتر مشترک}$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow W(0, -1), r = 2$$



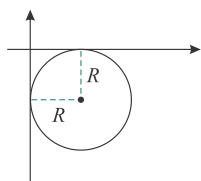
درواقع چون دایرهٔ بزرگ‌تر از $(0, -3)$ عبور می‌کند، پس نقطهٔ تماس همین نقطه است و همچنین $W'(0, -2)$ و $r' = 1$ خواهد بود.

$$C' : (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطه $(2, -9)$ نیز عبور کند به صورت زیر است:



ب) معادله دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادله این دایره برابر است با:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

چون هر دو دایره از نقطه $(2, -9)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادله آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=2, y=-9} (2 - R)^2 + (-9 + R)^2 = R^2 \Rightarrow 4 - 4R + R^2 + 81 - 18R + R^2 = R^2$$

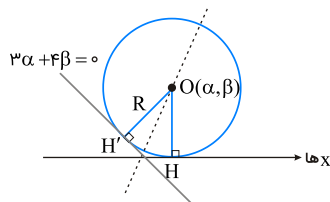
$$\Rightarrow R^2 - 22R + 85 = 0 \Rightarrow (R - 17)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 17 \\ R = 5 \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

مرکز دایره را نقطه $O(\alpha, \beta)$ در نظر می‌گیریم. باید فاصله O از محور x با فاصله آن از خط $3x + 4y = 0$ برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 5\beta \\ 3\alpha + 4\beta = -5\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \beta \\ 3\alpha = -9\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز : } O(\alpha, 3\alpha) \\ \text{مرکز : } O(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha) \end{cases}$$

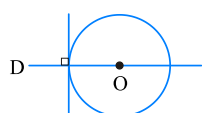


مرکز دایره در ناحیه اول است، پس فقط $O(\alpha, 3\alpha)$ قابل قبول است؛ بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = 3 \Rightarrow \beta = 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

خط به معادله $3x + 2y = a$ از مرکز دایره می‌گذرد، پس قطر دایره است. باتوجه به آنکه قطر $3x + 2y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس شکل زیر را داریم:



مختصات مرکز دایره در معادله خط صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -\frac{1}{2})$$

$$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

در آغاز معادله دایره را به صورت استاندارد می نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

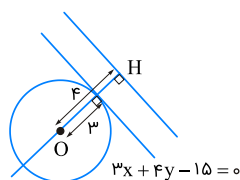
$$\xrightarrow{\text{دسته بندی جمله ها}} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9} = 3, \quad O = (1, -2)$$

فاصله هر نقطه مانند (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ که $a^2 + b^2 \neq 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ پس فاصله مرکز دایره $O = (1, -2)$ تا خط $3x + 4y - 15 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

فاصله یک نقطه تا یک خط برابر با اندازه عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصله مرکز تا خط مورد نظر، برابر با طول پاره خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. از آنجاکه هر قطر دایره، در نقطه تماس بر آن عمود است، پس کوتاه ترین فاصله نقاط دایره تا خط مورد نظر (شکل زیر) برابر می شود با $d_{\min} = 4 - 3 = 1$.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

باتوجه به شکل، قطر نیم دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

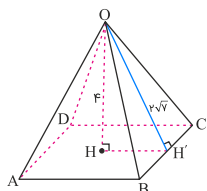
نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده ای برابر با عرض آن پدید می آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می آید.

بنابراین باتوجه به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{3}{2}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{2}\pi = 15/2\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶



$$\Delta OHH' \text{ در فیثاغورس : } OH^2 + HH'^2 = OH'^2$$

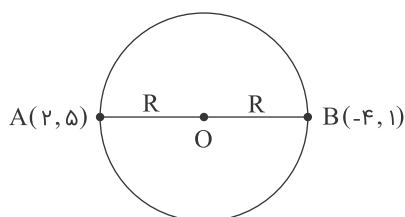
$$\Rightarrow 16 + HH'^2 = 28 \Rightarrow HH' = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{مربع ABCD است}} AB = 2HH' = 4\sqrt{3}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times OH = \frac{1}{3} (4\sqrt{3})^2 (4) = 64$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

کوچکترین دایره گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O \text{ وسط } AB \Rightarrow O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

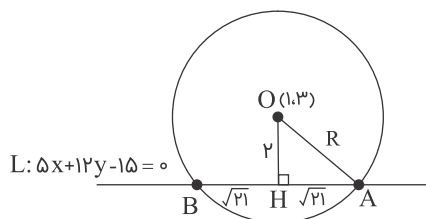
$$\Rightarrow \text{دایره : } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+1)^2 + (0-3)^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

از مرکز دایره بر خط $L: 5x + 12y - 15 = 0$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{21}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|5(1) + 12(3) - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\triangle OHA: \text{ فیثاغورس} \Rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{21})^2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{دایره}: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادله دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16$$

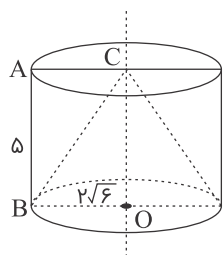
$$\Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, x = 5$$

$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور xها}: (-3, 0), (5, 0)$$

$$\Rightarrow \text{طول پاره خط حاصل} = 5 - (-3) = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



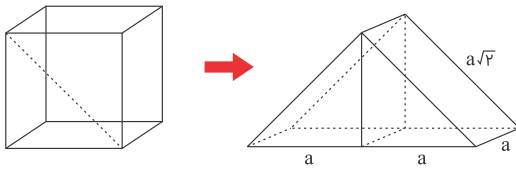
$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(24)(5) = 80\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = 2(a \times a\sqrt{2} + a \times a + 2 \times \frac{a^2}{2}) = 2(a^2\sqrt{2} + 2a^2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.
ب) معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به گونه ای می یابیم که ضریب x^2 و y^2 باهم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

ازطرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +3$ و $a = -3$ را در معادله دایره جایگذاری می کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = 3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{1}{2}$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 5 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

به ازای $a = -3$ ، معادله دایره ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ داریم.

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) اگر معادله گسترده دایره‌ای را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2 - c}$ است.
 ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:
 باتوجه به گام اول، مرکز این دایره نقطه $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2 - a} = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$$

ازطرفی فاصله نقطه $(1, -2)$ از خط $x + 3y = 0$ برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - a} &= \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25 \\ \Rightarrow 10a &= 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

باتوجه به قسمت (ج) از گام اول، باید معادله تلاقی خط و دایره، ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (I)$$

با جایگذاری رابطه I در معادله دایره، به یک معادله درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشه مضاعف دارد.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y + a &= 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0 \\ \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a &= 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a &= 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

گام دوم

طبق قسمت الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصله نقطه $(2, 0)$ از خط $y = x$. پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0$$

$$R = \frac{|-2 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2$$

اکنون نقطه تلاقی دایره با خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = 1$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادله $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha, 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هریک از نقاط $(0, 0)$ و $(3, 1)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \quad \left. \begin{array}{l} R = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 5\alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow 5\alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{6}{1}\right) \Rightarrow O_1(2, -6)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 + 1} = \sqrt{4 + 36 + 1} = \sqrt{41} = \sqrt{41}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{4}{1}, -\frac{-6}{1}\right) \Rightarrow O_2(-4, 6)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{1}\right)^2 + \left(\frac{-6}{1}\right)^2 - 12} = \sqrt{16 + 36 - 12} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (6 + 6)^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$R_1 + R_2 = \sqrt{41} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$$

چون $O_1O_2 = R_1 + R_2$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(-2, 0)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وترى از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = 0$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطه $O(0, \alpha)$ مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = 1$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$\begin{aligned} R = OA &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{4 + \alpha^2} \\ y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow R &= \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{1^2}} = |\alpha - 1| \\ \Rightarrow \sqrt{4 + \alpha^2} &= |\alpha - 1| \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2 \\ \Rightarrow 4 + \alpha^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow -2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - 1| = \left| -\frac{3}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

گام اول

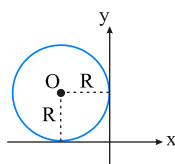
الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.
ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند و باتوجه به قسمت الف) از گام اول، نقطه $(-2, 1)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت ب) از گام اول، فاصله نقطه $(-2, 1)$ از خط $y = x - 1$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} y = x - 1 \Rightarrow x - y - 1 &= 0 \\ R &= \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به طور کامل در یکی از چهار ناحیه مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیه دوم قرار دارد، پس دایره موردنظر به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادله این دایره برابر است با:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند:

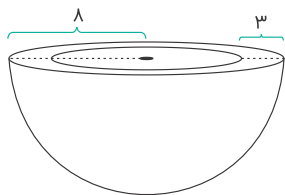
$$\xrightarrow{x=-1, y=2} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R - 5 = 0 \Rightarrow R = 5 \\ R - 1 = 0 \Rightarrow R = 1 \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$2R = 2(5) = 10$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبه سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکره درونی، نیمکره بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایره دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکره بیرونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 64) = 2\pi \times 64 = 128\pi$$

$$S_{\text{نیمکره درونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 25) = 2\pi \times 25 = 50\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(64 - 25) = 39\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکره بیرونی}} + S_{\text{نیمکره درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = 128\pi + 50\pi + 39\pi = 217\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادله تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشه مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2 + (mx+2)^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 4mx + 4 - 2x = 3 \\ \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0$$

این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 12m - 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه $(2, 1)$ ، $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(2, 1)} 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-2, 4)} (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b + c = -20 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(0, 0)} 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (III)$$

با جایگذاری $c = 0$ در دو معادله I و II، به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = -5 \xrightarrow{b=-5} 2a - 5 = -5 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

اکنون با توجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

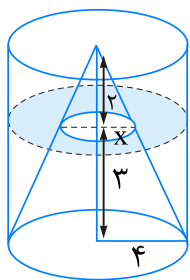
ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \Rightarrow O_1 : (1, -2), R_1 = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصله مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$



$$\text{نسبت تشابه: } \frac{x}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{3}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{9}\pi = \frac{336}{9}\pi = 13\frac{4}{3}\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (0,0)} c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (2,1)} 4 + 1 + 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (1,-2)} 1 + 4 + a - 2b = 0$$

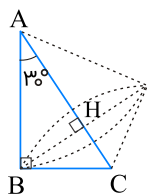
اکنون با معلوم بودن مقادیر a ، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول وتر AC ، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH) ، شعاع قاعده این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = 8 \Rightarrow BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$BC^2 = AC \cdot CH \Rightarrow 16 = 8 \times CH$$

$$\Rightarrow CH = 2 \Rightarrow AH = 8 - 2 = 6$$

$$BH^2 = AH \cdot CH = 2 \times 6 = 12$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

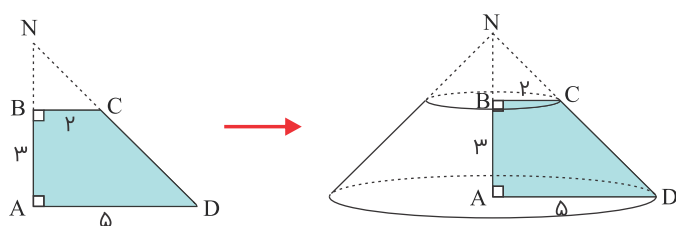
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times CH \\ &= \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 + \frac{\pi}{3} \times 12 \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \end{aligned}$$

گام اول

الف) در یک دوزنقه قائم الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم الزاویه به وجود می‌آید.
 ب) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.
 ج) حجم مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

دوزنقه $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\triangle N\hat{A}D$ و $\triangle N\hat{B}C$ قائم الزاویه هستند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle N\hat{B}C$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle N\hat{A}D$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه به اینکه $BC \parallel AD$ است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BN = 2BN + 6 \Rightarrow 3BN = 6 \Rightarrow BN = 2$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \triangle N\hat{A}D} - V_{\text{دوران مثلث } \triangle N\hat{B}C}$$

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 2 = \frac{1}{3}\pi(125 - 8) = \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

گام اول

الف) دایره محور x ها را در دو نقطه به طول $x = 1$ و $x = 3$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(1, 0)$ و $B(3, 0)$ روی دایره موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصله آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2}$$

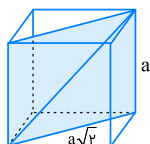
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(2, 2)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحه قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{2}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازه a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{3}$ است (با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

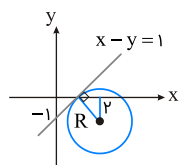
$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

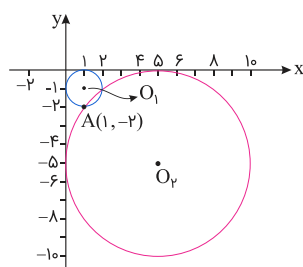
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



$$\text{معادله دایره : } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



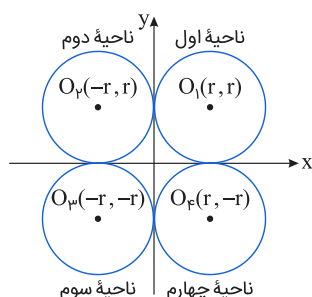
شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرند. به علاوه مرکز دایره‌ها به صورت $O(r, -r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورهای برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r, -r)$ و شعاع r هستند. معادله آن‌ها به این صورت است:

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)(r - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم. نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به صورت زیر است:



$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$

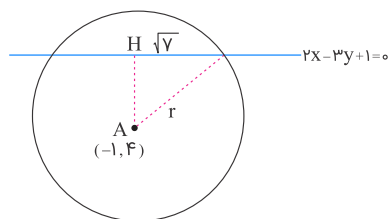
$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 20 \Rightarrow O(-1, -2)$$

معادله فوق، معادله یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2r = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

فاصله مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

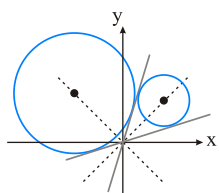
$$r^2 = AH^2 + \sqrt{V}^2 \Rightarrow r^2 = 13 + 7 = 20$$

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد. باتوجه به شکل، مرکز دایره کوچکتر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگتر روی $y = -x$ قرار دارد.



$$M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط $2y - x = 0$ است.

$$R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول است، پس مختصات آن به صورت (x, x) است. فاصله مرکز دایره از نقطه $A(6, 3)$ و خط $y = 2x$ یکسان است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-6)^2 + (x-3)^2} &= \frac{|2x-x|}{\sqrt{2^2+1^2}} \Rightarrow (x-6)^2 + (x-3)^2 = \frac{x^2}{5} \Rightarrow 2x^2 - 18x + 45 = \frac{x^2}{5} \\ \Rightarrow 9x^2 - 90x + 225 &= 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{شعاع دایره : } R &= \frac{|x|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

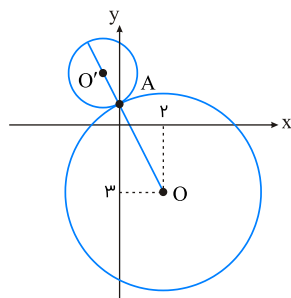
چون دایره بر دو خط موازی $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = 2x + 5$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصله این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|10 - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + (2x + 5)^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{5x^2 + 20x + 25} \\ \Rightarrow 5(x^2 + 4x + 4) &= 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) + 5 = 1 \\ \text{مرکز دایره} &= (-2, 1) \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵



مطابق شکل، مراکز دو دایره مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره C' در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (2, -3)$ و $A = (0, 1)$ داریم:

$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

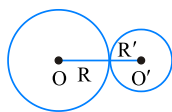
$$OA \text{ خط: } y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه $(-1, 3)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات است و در معادله خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-1, 3)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O = (-1, 0) \\ R = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -2) \\ R' = \sqrt{5-a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{5} \\ R + R' = 1 + \sqrt{5-a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'|=R+R'} \sqrt{5} = 1 + \sqrt{5-a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-a} = 4 \Rightarrow 5-a = 16 \Rightarrow a = -11$$

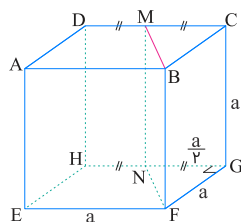
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطه موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های AE, FG, EF, BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحه گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحه گذرنده از AB و این نقطه، صفحه قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطه موردنظر، نقطه M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطه M را به نقطه N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN \parallel BF$ و در نتیجه صفحه گذرنده از M و N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1 ، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\triangle GFN} \times CG = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A ، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(3, 0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(0, -3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون با توجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{4}{1}\right) \Rightarrow O_1(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 + 13} = \sqrt{4 + 16 + 13} = \sqrt{33} = \sqrt{11} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{5} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{5}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(2, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_2(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 19} = \sqrt{4 + 4 - 19} = 1$$

طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

همچنین داریم:

$$|R_1 - R_2| = |3 - 1| = 2$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.